Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет»
Факультет математики, информационных и авиационных технологий

Ю.В. Цыганова

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «Программные средства вычислительной математики»

Для студентов магистратуры по направлению 02.04.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем»
очной формы обучения

Ульяновск, 2022

Методические указания для самостоятельной работы студентов по дисциплине «Программные средства вычислительной математики» / составитель: Ю.В. Цыганова. – Ульяновск: УлГУ, 2022. Настоящие методические указания предназначены для студентов магистратуры по направлению 02.04.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем» очной формы обучения. В работе приведены литература по дисциплине, основные темы курса, контрольные вопросы и задания в рамках каждой темы. Рекомендуется студентам очной формы обучения при подготовке к экзамену по данной дисциплине.

Рекомендованы к введению в образовательный процесс Ученым советом факультета математики, информационных и авиационных технологий УлГУ (протокол № 3/22 от 19 апреля 2022 г.).

Содержание

1. ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

а) Список рекомендуемой литературы

основная

1. Семушин И.В. “Вычислительные методы алгебры и оценивания: учебное пособие”. – Ульяновск: УлГТУ, 2011. – 366 с.
2. Губина, Т.Н. Учебно-методическое пособие по дисциплине «Компьютерное моделирование» : учебное пособие / Т.Н. Губина, И.Н. Тарова ; Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, Министерство образования Российской Федерации. - Елец : ЕГУ им. И.А. Бунина, 2004. - 155 с. - Библиогр. в кн. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=272142
3. Изюмов, А.А. Компьютерные технологии в науке и образовании : учебное пособие / А.А. Изюмов, В.П. Коцубинский ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Томский Государственный Университет Систем Управления и Радиоэлектроники (ТУСУР). - Томск : Эль Контент, 2012. - 150 с. : ил.,табл., схем. - ISBN 978-5-4332-0024-1 ; То же [Электронный ресурс]. - URL:http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=208648
4. Интерактивные системы Scilab, Matlab, Mathcad : учебное пособие / И.Е. Плещинская, А.Н. Титов, Е.Р. Бадертдинова, С.И. Дуев ; Министерство образования и науки России, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 195 с. : табл., ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-7882-1715-4 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428781
5. Далингер Виктор Алексеевич. Информатика и математика. Решение уравнений и оптимизация в Mathcad и Maple : Учебник и практикум для вузов / Далингер Виктор Алексеевич, Симонженков Сергей Дмитриевич; Далингер В. А., Симонженков С. Д. - 2-е изд. ; испр. и доп. - Москва : Юрайт, 2022. - 155 с. - (Высшее образование). - URL: https://urait.ru/bcode/490949 (дата обращения: 24.01.2022). - Режим доступа: Электронно-библиотечная система Юрайт, для авториз. пользователей. - Электрон. дан. - ISBN 978-5-534-11235-1 : 449.00. - URL: https://urait.ru/bcode/490949

дополнительная

6. Злизняк, В.Е. Теория и практика по вычислительной математике : учебное пособие / В.Е. Злизняк, Г.И. Щепановская ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Сибирский Федеральный университет. - Красноярск : Сибирский федеральный университет, 2012. - 174 с. : табл. - ISBN 978-5-7638-2498-8 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=229271
7. Чичкарев, Е.А. Компьютерная математика с Maxima / Е.А. Чичкарев. - 2-е изд., испр. - М. : Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ», 2016. - 459 с. : граф. - Библиогр. в кн. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428974
8. Кручинин, В.В. Компьютерные технологии в науке, образовании и производстве электронной технике : учебное пособие / В.В. Кручинин, Ю.Н. Тановицкий, С.Л. Хомич. - Томск : Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2012. - 155 с.; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=208586

учебно-методическая

9. Семушин И.В., Цыганова Ю.В., Афанасова А.И. “Методы вычислений с использованием МАТЛАБ” – Ульяновск, УлГУ, 2014. – 108 с.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Основными видами самостоятельной работы при изучении дисциплины «Программные средства вычислительной математики» являются:

- подготовка к лабораторным занятиям через проработку лекционного материала по соответствующей теме;
- изучение тем, не вошедших в лекционный материал, но обязательных согласно рабочей программе дисциплины;
- систематизация знаний путем проработки пройденных лекционных материалов по конспекту лекций, учебникам и пособиям на основании перечня экзаменационных вопросов, тестовых вопросов по материалам лекционного курса и базовых вопросов по результатам освоения тем.
- подготовка к текущему и итоговому контролю;
- самостоятельное изучение вопросов по заранее приведенным темам.

Текущий контроль знаний проводится преподавателем, ведущим лабораторные занятия. Текущий контроль проводится путем индивидуального опроса студентов по результатам освоения тем, вынесенных на лабораторные занятия (по материалам, изложенным в лекционном курсе).

Тема для самостоятельного изучения

Название разделов и тем	Вид самостоятельной работы	Объем в часах	Форма контроля
1. История развития систем компьютерной математики.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена. Литература основная [3].	12	Экзамен
2. Системы для проведения численных расчетов.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена. Литература дополнительная [7].	14	Экзамен
3. Системы для проведения символьных расчетов.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена. Литература основная [5].	10	Экзамен
4. Обзор компьютерной среды MATLAB.	Проработка учебного материала, лабораторные работы, подготовка к сдаче экзамена. Литература основная [4], учебно-методическая [9].	10	Экзамен
5. Обзор системы Mathematica.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена. Литература основная [3].	12	Экзамен
6. Обзор системы Maple.	Проработка учебного материала, лабораторные работы,	14	Экзамен, проверка лабораторных работ

	подготовка к сдаче экзамена. Литература основная [5].		
7. Обзор и пример работы в среде Scilab.	Проработка учебного материала, лабораторные работы, подготовка к сдаче экзамена. Литература основная [4].	12	Экзамен
8. Обзор и пример работы в системе MAXIMA.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена. Литература дополнительная [7].	12	Экзамен
9. Обзор и пример работы в системе R.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена. Литература основная [2], [3].	10	Экзамен

3. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Компьютерные среды в научных исследованиях.
2. Компьютерные среды как средство автоматизации вычислений.
3. Влияние компьютеризации на область вычислительной математики.
4. Этапы развития компьютерных сред.
5. Компьютерные среды в математическом моделировании.
6. Принципы сочетания традиционных и компьютерно-ориентированных методических подходов к изучению вычислительной математики.
7. Применение компьютерных средств для решения задач вычислительной математики.
8. История развития систем компьютерной математики.
9. Системы для проведения численных расчетов.
10. Системы для проведения статистических расчетов.
11. Системы для проведения символьных расчетов.
12. Особенности работы в SciLab.
13. Особенности работы в Maple.
14. Особенности работы в MATLAB.

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

4.1. Лабораторная работа № 1

Матрицы и определители матриц.

Задание 1.1. Выполнить действия над матрицами (см. табл. 1).

Задание 1.2. Вычислить определитель (4) $\Delta^{(4)}$ (см. табл. 2) четвертого порядка:

1) путем понижения порядка (предварительно получив максимальное количество нулей в строке или столбце);

2) путем приведения определителя к треугольному виду.

Задание 1.3. Вычислить определитель (4) $\Delta^{(4)}$ четвёртого порядка (см. табл. 3) (α_1, α_2, α_3, α_4 – параметры) путем понижения порядка, предварительно получив максимальное количество нулей в строке (столбце). Значения коэффициентов a, b, c, d соответствующего варианта студента берутся из табл. 4.

Таблица 2

Вар	Определитель	Вар	Определитель	Вар	Определитель
1	$\begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 0 \\ -8 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 2 & -2 \end{vmatrix}$	**2**	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$	**3**	$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \\ -2 & -5 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & -4 & 0 \end{vmatrix}$
4	$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 & 6 \\ 9 & 8 & 5 & 9 \\ 3 & 7 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$	**5**	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 5 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ -1 & -3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$	**6**	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -3 & 9 & -27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{vmatrix}$
7	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$	**8**	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$	**9**	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & -4 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
10	$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$	**11**	$\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 \\ 4 & 5 & 6 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$	**12**	$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & -5 & -3 & 7 \end{vmatrix}$
13	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$	**14**	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{vmatrix}$	**15**	$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 8 & 5 \\ 1 & -9 & -3 & -5 \\ 3 & 5 & 7 & 5 \end{vmatrix}$

Таблица 3

Вар	Определитель $\Delta^{(4)}$	Вар	Определитель $\Delta^{(4)}$
1–7	$\Delta^{(4)} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 2 & a & b & c \\ b & 2c & a+b & -a \\ -d & -a & c+b & 0 \end{vmatrix}$	**8–14**	$\Delta^{(4)} = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+d & a+d \\ 1 & -a & -b & -c \\ -b & 2 & b-c & a-d \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{vmatrix}$
15–22	$\Delta^{(4)} = \begin{vmatrix} a-b & 1 & 2c & \alpha_1 \\ b-c & -a & 3b & \alpha_2 \\ c-d & -b & 2a & \alpha_3 \\ d-a & -c & 0 & \alpha_4 \end{vmatrix}$	**23–30**	$\Delta^{(4)} = \begin{vmatrix} d & \alpha_1 & 0 & a^2 \\ c & \alpha_2 & 1 & b^2 \\ b & \alpha_3 & 2 & c^2 \\ a & \alpha_4 & 4 & d^2 \end{vmatrix}$

Таблица 4

Вар	*a*	*b*	*c*	*d*	Вар	*a*	*b*	*c*	*d*
1	2	2	3	4	**16**	3	4	4	2
2	2	4	3	1	**17**	3	2	4	1
3	3	2	1	4	**18**	2	3	4	3
4	4	1	2	3	**19**	4	4	2	1
5	2	4	1	3	**20**	2	2	4	3
6	2	1	3	2	**21**	2	2	3	4
7	1	3	4	2	**22**	4	2	2	2
8	2	3	1	2	**23**	1	4	3	2
9	2	3	1	4	**24**	4	1	2	3
10	3	2	1	4	**25**	2	4	2	2
11	2	3	1	3	**26**	3	4	3	2
12	1	3	3	4	**27**	1	2	4	4
13	3	4	3	2	**28**	1	3	4	3
14	2	2	3	4	**29**	2	3	3	4
15	3	3	2	3	**30**	2	3	4	2

Методические указания к выполнению:

Задание 1.1.

```
> restart; with(LinearAlgebra):
> print(`Задаем исходные матрицы`); A:=Matrix(2,2,[[1,3],[2,1]]); B:=Matrix(3,2,[[2,1],[-1,0], [1,0]]); C:=Matrix
(3,3,[[2,1,0],[-2,-1,0], [3,2,-1]]); E:=IdentityMatrix(3);
```

Задаем исходные матрицы

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

```
> print(`Вычисляем матрицу A1, обратную к матрице A`); A1:=MatrixInverse(A);
```

Вычисляем матрицу A1, обратную к матрице A

$$A1 := \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

```
> B1:=Transpose(B);
```

$$B1 := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

```
> C1 := MatrixMatrixMultiply(A, B1);
```

$$C1 := \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

```
> print(`Складываем матрицы C и E`); C2:=MatrixAdd(C,E);
```

Складываем матрицы C и E

$$C2 := \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

```
>
> Matrix_D:=MatrixMatrixMultiply(C1,C2);
```

$$Matrix\_D := \begin{bmatrix} 20 & 7 & 0 \\ 25 & 9 & 0 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

```
>
```

Задание 1.2.

```
> restart; with(LinearAlgebra):
> print(`Задаем исходную матрицу 4-го порядка`); A:=Matrix(4,4,[[2,3,-2,0],[-4,-2,0,-3],[-5,0,2,3],[-3,5,1,2]]);
```

Задаем исходную матрицу 4-го порядка

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & -3 \\ -5 & 0 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

```
> print(`Вычисляем определитель матрицы при помощи встроенной команды`); DeterminantA:=Determinant(A);
```

Вычисляем определитель матрицы при помощи встроенной команды

$$DeterminantA := -189 \quad (2)$$

```
> print(`Выводим строки матрицы A`); A[1]; A[2]; A[3]; A[4];
```

Выводим строки матрицы A

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

```
> print(`Далее вычисляем определитель матрицы путем понижения порядка`); print(`Получаем нули в третьем столбце определителя при помощи элементарных преобразований`); A[3]:=A[3]+A[4]*(-2); A[1]:=A[1]+A[4]*(2); print(`После элементарных преобразований имеем`); A;
```

Далее вычисляем определитель матрицы путем понижения порядка

Получаем нули в третьем столбце определителя при помощи элементарных преобразований

$$A_3 := \begin{bmatrix} 1 & -10 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 := \begin{bmatrix} -4 & 13 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

После элементарных преобразований имеем

$$\begin{bmatrix} -4 & 13 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & -10 & 0 & -1 \\ -3 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

```
> print(`Раскладываем определитель по третьему столбцу`); print(`B - матрица из алгебраических дополнений для элементов матрицы, транспонированной к исходной`); B:=Transpose(Adjoint(A));
>
```

Раскладываем определитель по третьему столбцу

B - матрица из алгебраических дополнений для элементов матрицы, транспонированной к исходной

$$B := \begin{bmatrix} 28 & 7 & 133 & -42 \\ 27 & 0 & 27 & 27 \\ 31 & 28 & 73 & -60 \\ 0 & 0 & -189 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

```
> print(`Выбираем дополнение для элемента 4,3. Это и есть ответ`); B[4,3];
```

Выбираем дополнение для элемента 4,3. Это и есть ответ

$$-189 \quad (6)$$

```
>
> restart; print(`ВТОРОЙ СПОСОБ. ПРИВЕДЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ К ТРЕУГОЛЬНОМУ ВИДУ`);
```

ВТОРОЙ СПОСОБ. ПРИВЕДЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ К ТРЕУГОЛЬНОМУ ВИДУ (7)

```
> with(LinearAlgebra):
> print(`Задаем исходную матрицу 4-го порядка`); A:=Matrix(4,4,[[2,3,-2,0],[-4,-2,0,-3],[-5,0,2,3],[-3,5,1,2]]);
```

Задаем исходную матрицу 4-го порядка

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & -3 \\ -5 & 0 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

```
> print(`Получаем первую ступень треугольной матрицы`); A[1]:=A[1]: A[2]:=A[2]+A[1]*(2); A[3]:=A[3]+A[1]*(5/2); A
[4]:=A[4]+A[1]*(3/2);
```

Получаем первую ступень треугольной матрицы

$$A_2 := \begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A_3 := \begin{bmatrix} 0 & \frac{15}{2} & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_4 := \begin{bmatrix} 0 & \frac{19}{2} & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

```
> print(`Матрица после первого преобразования имеет вид`); A;
```

Матрица после первого преобразования имеет вид

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & -3 \\ 0 & \frac{15}{2} & -3 & 3 \\ 0 & \frac{19}{2} & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

```
> print(`Получаем вторую ступень треугольной матрицы`); A[3]:=A[3]+A[2]*(-15/8); A[4]:=A[4]+A[2]*(-19/8);
```

Получаем вторую ступень треугольной матрицы

$$A_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{9}{2} & \frac{69}{8} \end{bmatrix}$$

$$A_4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{15}{2} & \frac{73}{8} \end{bmatrix} \quad (11)$$

```
> print(`Матрица после второго преобразования имеет вид`); A;
```

Матрица после второго преобразования имеет вид

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} & \frac{69}{8} \\ 0 & 0 & \frac{15}{2} & \frac{73}{8} \end{bmatrix} \quad (12)$$

```
> print(`Получаем третью ступень треугольной матрицы`); A[4]:=A[4]+A[3]*(-15/9);
```

Получаем третью ступень треугольной матрицы

$$A_4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{21}{4} \end{bmatrix} \quad (13)$$

```
> print(`Матрица после третьего преобразования имеет вид`); A;
```

Матрица после третьего преобразования имеет вид

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} & \frac{69}{8} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{21}{4} \end{bmatrix} \quad (14)$$

```
> print(`Вычисляем определитель треугольной матрицы путем произведения ее диагональных элементов`);
DeterminantA:=A[1,1]*A[2,2]*A[3,3]*A[4,4];
```

Вычисляем определитель треугольной матрицы путем произведения ее диагональных элементов

$$DeterminantA := -189 \quad (15)$$

```
>
```

Задание 1.3.

```
> restart; with(LinearAlgebra):
> print(`Задаем исходную матрицу 4-го порядка`); A:=Matrix(4,4,[[2,1,12,alpha[1]],[3,-3,5,alpha[2]],[4,0,7,alpha[3]],[1,4,-3,alpha[4]]]);
```

Задаем исходную матрицу 4-го порядка

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 12 & \alpha_1 \\ 3 & -3 & 5 & \alpha_2 \\ 4 & 0 & 7 & \alpha_3 \\ 1 & 4 & -3 & \alpha_4 \end{bmatrix} \quad (1)$$

```
> print(`Вычисляем определитель матрицы при помощи встроенной команды`); DeterminantA:=Determinant(A);
```

Вычисляем определитель матрицы при помощи встроенной команды

$$DeterminantA := -172\,\alpha_3 + 101\,\alpha_4 + 155\,\alpha_2 + 61\,\alpha_1 \quad (2)$$

```
>
> print(`ПЕРВЫЙ СПОСОБ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПУТЕМ ПОНИЖЕНИЯ ПОРЯДКА`);
```

ПЕРВЫЙ СПОСОБ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПУТЕМ ПОНИЖЕНИЯ ПОРЯДКА (3)

```
> print(`Выводим строки матрицы A`); A[1]; A[2]; A[3]; A[4];
```

Выводим строки матрицы A

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 12 & \alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 5 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 7 & \alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & \alpha_4 \end{bmatrix} \quad (4)$$

```
> print(`Далее вычисляем определитель матрицы путем понижения порядка`); print(`Получаем нули во втором столбце определителя при помощи элементарных преобразований`); A[2]:=A[2]+A[1]*(3): A[4]:=A[4]+A[1]*(-4): print(`После элементарных преобразований имеем`); A;
```

Далее вычисляем определитель матрицы путем понижения порядка

Получаем нули во втором столбце определителя при помощи элементарных преобразований

После элементарных преобразований имеем

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 12 & \alpha_1 \\ 9 & 0 & 41 & \alpha_2 + 3\,\alpha_1 \\ 4 & 0 & 7 & \alpha_3 \\ -7 & 0 & -51 & \alpha_4 - 4\,\alpha_1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

```
> print(`Матрица после первого преобразования имеет вид`); A;
```

Матрица после первого преобразования имеет вид

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 12 & \alpha_1 \\ 0 & -\frac{9}{2} & -13 & \alpha_2 - \frac{3}{2}\alpha_1 \\ 0 & -2 & -17 & \alpha_3 - 2\alpha_1 \\ 0 & \frac{7}{2} & -9 & \alpha_4 - \frac{1}{2}\alpha_1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

```
> print(`Получаем вторую ступень треугольной матрицы`); A[2]:=A[2]: A[3]:=A[3]+A[2]*(-4/9); A[4]:=A[4]+A[2]*(7/9)
;
```

Получаем вторую ступень треугольной матрицы

$$A_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{101}{9} & \alpha_3 - \frac{4}{3}\alpha_1 - \frac{4}{9}\alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$A_4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{172}{9} & \alpha_4 - \frac{5}{3}\alpha_1 + \frac{7}{9}\alpha_2 \end{bmatrix} \tag{12}$$

```
> print(`Матрица после второго преобразования имеет вид`); A;
```

Матрица после второго преобразования имеет вид

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 12 & \alpha_1 \\ 0 & -\frac{9}{2} & -13 & \alpha_2 - \frac{3}{2}\alpha_1 \\ 0 & 0 & -\frac{101}{9} & \alpha_3 - \frac{4}{3}\alpha_1 - \frac{4}{9}\alpha_2 \\ 0 & 0 & -\frac{172}{9} & \alpha_4 - \frac{5}{3}\alpha_1 + \frac{7}{9}\alpha_2 \end{bmatrix} \tag{13}$$

```
> print(`Получаем третью ступень треугольной матрицы`); A[3]:=A[3]: A[4]:=A[4]+A[3]*(-172/101);
```

Получаем третью ступень треугольной матрицы

$$A_4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha_4 + \frac{61}{101}\alpha_1 + \frac{155}{101}\alpha_2 - \frac{172}{101}\alpha_3 \end{bmatrix} \tag{14}$$

```
> print(`Матрица после третьего преобразования имеет вид`); A;
```

Матрица после третьего преобразования имеет вид

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 12 & \alpha_1 \\ 0 & -\frac{9}{2} & -13 & \alpha_2 - \frac{3}{2}\alpha_1 \\ 0 & 0 & -\frac{101}{9} & \alpha_3 - \frac{4}{3}\alpha_1 - \frac{4}{9}\alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 + \frac{61}{101}\alpha_1 + \frac{155}{101}\alpha_2 - \frac{172}{101}\alpha_3 \end{bmatrix} \tag{15}$$

```
> print(`Вычисляем определитель треугольной матрицы путем произведения ее диагональных элементов`);
DeterminantA:=A[1,1]*A[2,2]*A[3,3]*A[4,4];
```

Вычисляем определитель треугольной матрицы путем произведения ее диагональных элементов

$$DeterminantA := 101\,\alpha_4 + 61\,\alpha_1 + 155\,\alpha_2 - 172\,\alpha_3 \tag{16}$$

```
>
> print(`Раскладываем определитель по второму столбцу`); print(`B - матрица из алгебраических дополнений для
элементов матрицы, транспонированной к исходной`); B:=Transpose(Adjoint(A));
```

Раскладываем определитель по второму столбцу

B - матрица из алгебраических дополнений для элементов матрицы, транспонированной к исходной

$$B := \begin{bmatrix} 0 & -172\,\alpha_3 + 101\,\alpha_4 + 155\,\alpha_2 + 61\,\alpha_1 & 0 & 0 \\ -51\,\alpha_3 - 7\,\alpha_4 + 28\,\alpha_1 & 18\,\alpha_3 - 34\,\alpha_4 - 19\,\alpha_1 & 4\,\alpha_4 - 16\,\alpha_1 + 7\,\alpha_3 & 155 \\ 51\,\alpha_2 + 41\,\alpha_4 - 11\,\alpha_1 & -18\,\alpha_2 + 26\,\alpha_4 + 14\,\alpha_1 & -9\,\alpha_4 + 15\,\alpha_1 - 7\,\alpha_2 & -172 \\ 7\,\alpha_2 - 41\,\alpha_3 + 21\,\alpha_1 & 34\,\alpha_2 - 26\,\alpha_3 + \alpha_1 & 9\,\alpha_3 - 4\,\alpha_2 - 12\,\alpha_1 & 101 \end{bmatrix} \tag{6}$$

```
> print(`Выбираем дополнение для элемента 1,2. Это и есть ответ`); B[1,2];
```

Выбираем дополнение для элемента 1,2. Это и есть ответ

$$-172\,\alpha_3 + 101\,\alpha_4 + 155\,\alpha_2 + 61\,\alpha_1 \tag{7}$$

```
>
> restart; print(`ВТОРОЙ СПОСОБ. ПРИВЕДЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ К ТРЕУГОЛЬНОМУ ВИДУ`);
```

ВТОРОЙ СПОСОБ. ПРИВЕДЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ К ТРЕУГОЛЬНОМУ ВИДУ (8)

```
> with(LinearAlgebra):
> print(`Задаем исходную матрицу 4-го порядка`); A:=Matrix(4,4,[[2,1,12,alpha[1]],[3,-3,5,alpha[2]],[4,0,7,alpha
[3]],[1,4,-3,alpha[4]]]);
```

Задаем исходную матрицу 4-го порядка

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 12 & \alpha_1 \\ 3 & -3 & 5 & \alpha_2 \\ 4 & 0 & 7 & \alpha_3 \\ 1 & 4 & -3 & \alpha_4 \end{bmatrix} \tag{9}$$

```
> print(`Получаем первую ступень треугольной матрицы`); A[1]:=A[1]: A[2]:=A[2]+A[1]*(-3/2); A[3]:=A[3]+A[1]*(-2);
A[4]:=A[4]+A[1]*(-1/2);
```

Получаем первую ступень треугольной матрицы

$$A_2 := \begin{bmatrix} 0 & -\frac{9}{2} & -13 & \alpha_2 - \frac{3}{2}\alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 := \begin{bmatrix} 0 & -2 & -17 & \alpha_3 - 2\alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$A_4 := \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{2} & -9 & \alpha_4 - \frac{1}{2}\alpha_1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

4.2. Лабораторная работа № 2

Нахождение обратной матрицы.

<u>Задание 2.1.</u> Выяснить, является ли матрица А (см. табл. 5) неособенной матрицей. В случае, если она является неособенной, найти для нее обратную матрицу при помощи элементарных преобразований. Сделать проверку.

<u>Задание 2.2.</u> Вычислить обратную матрицу для матрицы из задания 2.1 при помощи разбиения ее на блоки. Сравнить с результатом задания 2.1.

Таблица 5

Вар	Матрица A	Вар	Матрица A
1	$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 3 & -1\\ 3 & 1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 5 & 1\end{pmatrix}$	**2**	$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 2 & 3\\ 1 & 10 & 3 & 6\\ 6 & 10 & 1 & 4\end{pmatrix}$
3	$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -2\\ 2 & -1 & -2 & -3\\ 3 & 2 & -1 & 2\\ 2 & -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$	**4**	$A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1 & 0\\ 1 & -3 & 3 & 7\\ 2 & -1 & 2 & -3\\ -5 & 4 & -1 & 2\end{pmatrix}$
5	$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 4\\ 1 & 1 & -1 & -1{,}5\end{pmatrix}$	**6**	$A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 1 & -2\\ 3 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -1 & -1\end{pmatrix}$
7	$A=\begin{pmatrix}5 & -4 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 1 & -1\\ 2 & 3 & -1 & 6\\ 1 & 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$	**8**	$A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 0 & 1\\ 3 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 2 & 1\\ -1 & 1 & -3 & -1\end{pmatrix}$
9	$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ -1 & -3 & 3 & -1\\ 0 & 4 & -10 & 2\\ 1 & -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$	**10**	$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & -3 & 0\\ 0 & 4 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 4 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 5\end{pmatrix}$

Методические указания к выполнению:

Задание 2.1.

Обращение матрицы при помощи схемы Гаусса

```
> restart; print(`Обращение матрицы при помощи схемы Гаусса`);
```

Обращение матрицы при помощи схемы Гаусса (1)

```
> with(LinearAlgebra):
> print(`Задаем исходную матрицу 4-го порядка`); A:=Matrix(4,4,[[0,1,-3,4],[1,0,-2,3],[3,2,0,-5],[4,3,-5,0]]);
  E:-IdentityMatrix(4); Inverse_Matrix_A:-MatrixInverse(A);
```

Задаем исходную матрицу 4-го порядка

$$A:=\begin{bmatrix}0 & 1 & -3 & 4\\ 1 & 0 & -2 & 3\\ 3 & 2 & 0 & -5\\ 4 & 3 & -5 & 0\end{bmatrix}$$

$$E:=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$Inverse\_Matrix\_A:=\begin{bmatrix}0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3}\\ \frac{5}{4} & 0 & 1 & -\frac{3}{4}\\ \frac{3}{4} & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{11}{12}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix} \quad (2)$$

```
> print(`Составляем расширенную матрицу AE размера 4x8`); Matrix_AE:=Matrix(4,8,[A, E]);
```

Составляем расширенную матрицу AE размера 4x8

$$Matrix\_AE:=\begin{bmatrix}0 & 1 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 4 & 3 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad (3)$$

```
> print(`Меняем местами первые две строки матрицы AE`); b:=Matrix_AE[2]; Matrix_AE[2]:=Matrix_AE[1]; Matrix_AE[1]
  :=b; Matrix_AE;
```

Меняем местами первые две строки матрицы AE

$$b := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Matrix\_AE_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Matrix\_AE_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

```
> print(`Получаем первую ступень треугольной матрицы`); Matrix_AE[1]:=Matrix_AE[1]: Matrix_AE[2]:=Matrix_AE[2]:
  Matrix_AE[3]:=Matrix_AE[3]+Matrix_AE[1]*(-3);  Matrix_AE[4]:=Matrix_AE[4]+Matrix_AE[1]*(-4);
```

Получаем первую ступень треугольной матрицы

$$Matrix\_AE_3 := \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & -14 & 0 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Matrix\_AE_4 := \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & -12 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

```
> print(`Матрица после первых проведенных преобразований имеет вид`); Matrix_AE;
```

Матрица после первых проведенных преобразований имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -14 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -12 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

```
> print(`Получаем вторую ступень треугольной матрицы`); Matrix_AE[1]:=Matrix_AE[1]: Matrix_AE[2]:=Matrix_AE[2]:
  Matrix_AE[3]:=Matrix_AE[3]+Matrix_AE[2]*(-2); Matrix_AE[4]:=Matrix_AE[4]+Matrix_AE[2]*(-3);
> print(`Матрица после вторых проведенных преобразований имеет вид`); Matrix_AE;
```

Получаем вторую ступень треугольной матрицы

$$Matrix\_AE_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 12 & -22 & -2 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Matrix\_AE_4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 12 & -24 & -3 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица после вторых проведенных преобразований имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -22 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -24 & -3 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

```
> print(`Получаем третью ступень треугольной матрицы`); Matrix_AE[1]:=Matrix_AE[1]: Matrix_AE[2]:=Matrix_AE[2]:
  Matrix_AE[3]:=Matrix_AE[3]; Matrix_AE[4]:=Matrix_AE[4]+Matrix_AE[3]*(-1);
> print(`Матрица после третьих проведенных преобразований имеет вид`); Matrix_AE;
```

Получаем третью ступень треугольной матрицы

$$Matrix\_AE_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 12 & -22 & -2 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Matrix\_AE_4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица после третьих проведенных преобразований имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -22 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

```
> print(`Получаем на главной диагонали треугольной матрицы - единицы`); Matrix_AE[1]:=Matrix_AE[1]/Matrix_AE[1,1]
  : Matrix_AE[2]:=Matrix_AE[2]/Matrix_AE[2,2]: Matrix_AE[3]:=Matrix_AE[3]/Matrix_AE[3,3]: Matrix_AE[4]:=Matrix_AE
  [4]/Matrix_AE[4,4]:
> print(`Матрица после четвертых проведенных преобразований имеет вид`); Matrix_AE;
```

Получаем на главной диагонали треугольной матрицы - единицы

Матрица после четвертых проведенных преобразований имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad (9)$$

```
> print(`Получаем четвертый столбец единичной матрицы`); Matrix_AE[4]:=Matrix_AE[4]: Matrix_AE[3]:=Matrix_AE[3]+
  Matrix_AE[4]*(11/6): Matrix_AE[2]:=Matrix_AE[2]+Matrix_AE[4]*(-4): Matrix_AE[1]:=Matrix_AE[1]+Matrix_AE[4]*(-3)
  :
> print(`Матрица после пятых проведенных преобразований имеет вид`); Matrix_AE;
```

Получаем четвертый столбец единичной матрицы

Матрица после пятых проведенных преобразований имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{11}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad (10)$$

```
> print(`Получаем третий столбец единичной матрицы`); Matrix_AE[4]:=Matrix_AE[4]: Matrix_AE[3]:=Matrix_AE[3]:
  Matrix_AE[2]:=Matrix_AE[2]+Matrix_AE[3]*(3): Matrix_AE[1]:=Matrix_AE[1]+Matrix_AE[3]*(2):
> print(`Матрица после шестых проведенных преобразований имеет вид`); Matrix_AE;
```

Получаем третий столбец единичной матрицы

Матрица после шестых проведенных преобразований имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{11}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad (11)$$

```
> Inverse_Matrix_A:=Matrix(4,4,[[Matrix_AE[1,5],Matrix_AE[1,6],Matrix_AE[1,7],Matrix_AE[1,8]], [Matrix_AE[2,5],
  Matrix_AE[2,6],Matrix_AE[2,7],Matrix_AE[2,8]], [Matrix_AE[3,5],Matrix_AE[3,6],Matrix_AE[3,7],Matrix_AE[3,8]],
  [Matrix_AE[4,5],Matrix_AE[4,6],Matrix_AE[4,7],Matrix_AE[4,8]]]);
```

$$Inverse\_Matrix\_A := \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{4} & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{11}{12} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad (12)$$

Задание 2.2.

Задание 2.2. Обращение матрицы 4х4

```
> with(LinearAlgebra):
> with(linalg):
> A := Matrix([[0,1,-3,4],[1,0,-2,3],[3,2,0,-5],[4,3,-5,0]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

1. Обращение матрицы 4х4 с помощью стандартной процедуры *MatrixInverse*

```
> B:=MatrixInverse(A); вывод обратной матрицы
```

$$B := \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{4} & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{11}{12} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

```
> Multiply(A,B); проверка обратимости
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

2. Разбиение матрицы 4х4 на блоки (и обращение)

```
> A1:=Matrix([[0,1],[1,0]]); A2:=Matrix([[-3,4],[-2,3]]); A3:=Matrix([[3,2],[4,3]]); A4:=Matrix([[0,-5],[-5,0]])
; создание клеток матрицы
```

$$A1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A2 := \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A3 := \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A4 := \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

```
> Block_A:=blockmatrix(2,2,[A1,A2,A3,A4]); задание блочной матрицы
```

$$Block\_A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

```
> Matrix_Inverse_A:=inverse(Block_A);
```

$$Matrix\_Inverse\_A := \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{4} & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{11}{12} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

```
> multiply(Block_A, Matrix_Inverse_A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

3. Обращение матрицы (блочной)

пусть неособенная квадратная матрица разбита на 4 клетки (блока), причем – неособенная квадратная матрица. В этом случае справедлива формула обращения матрицы:

```
> P1:=multiply(multiply(A3,inverse(A1)),A2): P2:=MatrixAdd(A4, MatrixScalarMultiply(Matrix(P1),-1)): N:=
inverse(P2);
```

$$N := \begin{bmatrix} 1 & -\frac{11}{12} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

```
> P1:=multiply(inverse(A1), MatrixScalarMultiply(A2,-1)): L:=multiply(P1, N);
```

$$L := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

```
> P1:=multiply(N, MatrixScalarMultiply(A3,-1)): M:=multiply(P1, inverse(A1));
```

$$M := \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

```
> E:=Matrix([[1,0],[0,1]]): P1:=multiply(A2,M): P2:=MatrixAdd(E, MatrixScalarMultiply(Matrix(P1),-1)): K:=
multiply(inverse(A1),P2);
```

$$K := \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{4} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

```
> Inverse_A_Block_Matrix:=blockmatrix(2,2,[K,L,M,N]);
```

$$Inverse\_A\_Block\_Matrix := \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{4} & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{11}{12} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

4.3. Лабораторная работа № 3

Решение систем линейных алгебраических уравнений. Исследование систем линейных алгебраических уравнений с параметром на совместность.

Задание 3.1. Решить СЛАУ (см. табл. 6) двумя способами (матричным и по формулам Крамера). Сделать проверку решения.

Задание 3.2. Решить СЛАУ (см. табл. 7) методом Гаусса. Сделать проверку решения.

Задание 3.3. Исследовать СЛАУ (см. табл. 8) с параметром λ. СЛАУ задана в виде своей расширенной матрицы $(A(\lambda) \mid b(\lambda))$. Решить ее в каждом случае. Выполнить проверку решения в каждом из случаев.

Таблица 6

Вар	СЛАУ	Вар	СЛАУ	Вар	СЛАУ
1	$\begin{cases} x+5y+5z=9 \\ x+5y+z+0 \\ 3x+4y+2z=8 \end{cases}$	**2**	$\begin{cases} x+9y-4z=9 \\ 2x+5y-3z=4 \\ 5x+6y-2z=18 \end{cases}$	**3**	$\begin{cases} x+y-z=-2 \\ 2x-4y+z=-4 \\ 2x+y=5 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x+y-2z=6 \\ 2x+3y-7z=16 \\ 5x+2y+z=16 \end{cases}$	**5**	$\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+3z=16 \\ 5y-z=10 \end{cases}$	**6**	$\begin{cases} 7x+2y+2z=15 \\ 5x-2y+2z=15 \\ 10x-11y+5z=36 \end{cases}$
7	$\begin{cases} x-3y+z=2 \\ 2x+y+3z=3 \\ 2x-y-2z=8 \end{cases}$	**8**	$\begin{cases} 2x-2y+z=1 \\ 4x-5y+z=0 \\ -9x+y-2z=-10 \end{cases}$	**9**	$\begin{cases} 2x-y+5z=6 \\ x+2y+3z=6 \\ x+3y-2z=2 \end{cases}$
10	$\begin{cases} x+3y=7 \\ 2x+y-z=1 \\ 4x-3y-2z=-8 \end{cases}$	**11**	$\begin{cases} x+2y-4z=0 \\ 3x+y-3z=-1 \\ 2x-y+5z=3 \end{cases}$	**12**	$\begin{cases} 2x-3y+z=3 \\ x+y-2z=4 \\ 3x-2y+6z=0 \end{cases}$
13	$\begin{cases} x+y-2z=1 \\ 2x+3y+z=0 \\ x-2y-z=7 \end{cases}$	**14**	$\begin{cases} 3x+2y-z=3 \\ x-y+2z=-4 \\ 2x+2y+z=4 \end{cases}$	**15**	$\begin{cases} 2x-3y+3z=0 \\ x+y-2z=-7 \\ x-2y+3z=3 \end{cases}$

Таблица 7

Вар	СЛАУ	Вар	СЛАУ
1	$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=-4 \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6 \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4 \end{cases}$	**2**	$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6 \\ x_1-x_2-2x_3-3x_4=8 \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4 \\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8 \end{cases}$
3	$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-2x_4=-1 \\ 2x_1-3x_2-x_3-x_4=-3 \\ 3x_1+2x_2-x_3 \quad =4 \\ -x_1-3x_2+x_3+4x_4=1 \\ 3x_1-4x_2-3x_4=-4 \end{cases}$	**4**	$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-x_4=5 \\ x_1-4x_2-2x_3+x_4=-1 \\ -3x_1+x_2-x_3+4x_4=-4 \\ 2x_1-x_2+4x_3+6x_4=6 \\ 5x_1-2x_2+4x_3-5x_4=9 \end{cases}$
5	$\begin{cases} x_2-3x_3+4x_4=-5 \\ x_1-2x_3+3x_4=-4 \\ 3x_1+2x_2-5x_4=12 \\ 4x_1+3x_2-5x_3=5 \end{cases}$	**6**	$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5 \\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4=1 \\ 4x_1+3x_2+2x_3+x_4=-5 \end{cases}$

Таблица 8

Вар	СЛАУ	Вар	СЛАУ
1	$\left(\begin{array}{ccc\|c} \lambda & 3 & -4 & 2 \\ 5 & \lambda+2 & 1 & -7 \\ 12 & 11 & -2 & -12 \end{array}\right)$	**2**	$\left(\begin{array}{ccc\|c} \lambda+3 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & -7 & 4 & 2 \\ 6 & 12\lambda & 13 & 4 \end{array}\right)$
3	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & \lambda+5 & -1 & -4 \\ \lambda+3 & -4 & 2 & 3 \\ 11 & -7 & 5 & 5 \end{array}\right)$	**4**	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 7 & 5 & 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2\lambda+1 & 3 & -2 \\ 11 & 27 & 5 & -1 \end{array}\right)$
5	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & -3 & 2\lambda & 10 \\ 5 & \lambda+2 & 3 & -7 \\ 12 & 7 & 0 & -4 \end{array}\right)$	**6**	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 5 & -\lambda-3 & -1 & 1 \\ \lambda-2 & 4 & 2 & -3 \\ 12 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$
7	$\left(\begin{array}{ccc\|c} \lambda+1 & -7 & 5 & -2 \\ \lambda & 2\lambda-3 & 1 & 1 \\ 7 & 23 & -11 & 3 \end{array}\right)$	**8**	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 3 & 2 & \lambda-3 & 4 \\ 2 & -2\lambda-1 & 2 & -1 \\ 11 & -1 & 2 & 11 \end{array}\right)$
9	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 2\lambda+1 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & \lambda-2 & 1 & 4 \\ 26 & 4 & -5 & 7 \end{array}\right)$	**10**	$\left(\begin{array}{ccc\|c} \lambda+1 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & -\lambda-2 & 5 & -3 \\ 5 & 1 & 11 & -7 \end{array}\right)$

Методические указания к выполнению:

Задание 3.1.

```
> restart; with(LinearAlgebra):
> print(`Задаем элементы (вектор-столбцы) основной матрицы системы`); a1:=Vector([1,-1,4]); a2:=Vector([2,2,5]);
  a3:=Vector([3,1,2]);
```

Задаем элементы (вектор-столбцы) основной матрицы системы

$$a1 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$a2 := \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$a3 := \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

```
> print(`Задаем основную матрицу A системы и вектор-столбец B свободных коэффициентов `); A:=Matrix(3,3,[a1,a2,
  a3]); B:=Matrix(3,1,[2,2,12]);
```

Задаем основную матрицу A системы и вектор-столбец B свободных коэффициентов

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 12 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

```
> print(`Решаем систему в матричном виде при помощи процедуры LinearSolve`); X:=LinearSolve(A,B);
```

Решаем систему в матричном виде при помощи процедуры LinearSolve

$$X := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

```
> print(`Решаем систему при помощи формул Крамера`); DeltaA:=Determinant(A); A1:=Matrix(3,3,[B,a2,a3]): Delta[1]
  :=Determinant(A1);A2:=Matrix(3,3,[a1,B,a3]): Delta[2]:=Determinant(A2); A3:=Matrix(3,3,[a1,a2,B]): Delta[3]:=
  Determinant(A3); x[1]:=Delta[1]/DeltaA; x[2]:=Delta[2]/DeltaA; x[3] := Delta[3]/DeltaA;
```

Решаем систему при помощи формул Крамера

$$DeltaA := -28$$

$$\Delta_1 := -28$$

$$\Delta_2 := -56$$

$$\Delta_3 := 28$$

$$x_1 := 1$$

$$x_2 := 2$$

$$x_3 := -1 \qquad (4)$$

```
> print(`Решаем систему с помощью обратной матрицы`);
```

Решаем систему с помощью обратной матрицы (5)

```
> Inverse_Matrix_A:=MatrixInverse(A);
```

$$Inverse\_Matrix\_A := \begin{bmatrix} \frac{1}{28} & -\frac{11}{28} & \frac{1}{7} \\ -\frac{3}{14} & \frac{5}{14} & \frac{1}{7} \\ \frac{13}{28} & -\frac{3}{28} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

```
> X:=MatrixMatrixMultiply(Inverse_Matrix_A, B);
```

$$X := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Задание 3.2.

Решение системы линейных алгебраических уравнений при помощи схемы Гаусса

```
> restart; with(LinearAlgebra):
> print(`Задаем основную матрицу A системы`); A:=Matrix(4,4,[[-5,2,3,4],[-5,2,-1,-5],[1,-2,-5,-5],[-1,2,-2,1]]);
  print(`Задаем вектор-столбец B системы`); B:=Matrix(4,1,[[18],[-21],[-39],[6]]);
```

Задаем основную матрицу A системы

$$A := \begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 & 4 \\ -5 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & -5 & -5 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Задаем вектор-столбец B системы

$$B := \begin{bmatrix} 18 \\ -21 \\ -39 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

```
> print(`Сначала решаем систему в матричном виде при момощи процедуры LinearSolve`); X:=LinearSolve(A,B);
```

Сначала решаем систему в матричном виде при момощи процедуры LinearSolve

$$X := \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

```
> print(`Для решения системы методом Гаусса составляем расширенную матрицу AB размера 4x5`); AB:=Matrix(4,5,[A,
  B]);
```

Для решения системы методом Гаусса составляем расширенную матрицу AB размера 4x5

$$AB := \begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 & 4 & 18 \\ -5 & 2 & -1 & -5 & -21 \\ 1 & -2 & -5 & -5 & -39 \\ -1 & 2 & -2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

```
> print(`Меняем местами первую и третью строки матрицы AB`); b:=AB[3]: AB[3]:=AB[1]: AB[1]:=b: AB;
```

Меняем местами первую и третью строки матрицы AB

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 & -5 & -39 \\ -5 & 2 & -1 & -5 & -21 \\ -5 & 2 & 3 & 4 & 18 \\ -1 & 2 & -2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

```
> print(`Получаем первую ступень ступенчатой матрицы`); AB[1]:=AB[1]: AB[2]:=AB[2]+AB[1]*(5); AB[3]:=AB[3]+AB[1]*
  (5);  AB[4]:=AB[4]+AB[1]*(1);
```

Получаем первую ступень ступенчатой матрицы

$$AB_2 := \begin{bmatrix} 0 & -8 & -26 & -30 & -216 \end{bmatrix}$$

$$AB_3 := \begin{bmatrix} 0 & -8 & -22 & -21 & -177 \end{bmatrix}$$

$$AB_4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -7 & -4 & -33 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

```
> print(`Матрица после первых проведенных преобразований имеет вид`); AB;
```

Матрица после первых проведенных преобразований имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 & -5 & -39 \\ 0 & -8 & -26 & -30 & -216 \\ 0 & -8 & -22 & -21 & -177 \\ 0 & 0 & -7 & -4 & -33 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

```
> print(`Получаем вторую ступень ступенчатой матрицы`); AB[1]:=AB[1]: AB[2]:=AB[2]: AB[3]:=AB[3]+AB[2]*(-1); AB
  [4]:=AB[4];
> print(`Матрица после вторых проведенных преобразований имеет вид`); AB;
```

Получаем вторую ступень ступенчатой матрицы

$$AB_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 9 & 39 \end{bmatrix}$$

$$AB_4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -7 & -4 & -33 \end{bmatrix}$$

Матрица после вторых проведенных преобразований имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 & -5 & -39 \\ 0 & -8 & -26 & -30 & -216 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & 39 \\ 0 & 0 & -7 & -4 & -33 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

```
> print(`Получаем третью ступень четвертой матрицы`); AB[1]:=AB[1]: AB[2]:=AB[2]: AB[3]:=AB[3]; AB[4]:=AB[4]+AB[3]*(7/4);
> print(`Матрица после третьих проведенных преобразований имеет вид`); AB;
```

Получаем третью ступень четвертой матрицы

$$AB_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 9 & 39 \end{bmatrix}$$

$$AB_4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{47}{4} & \frac{141}{4} \end{bmatrix}$$

Матрица после третьих проведенных преобразований имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 & -5 & -39 \\ 0 & -8 & -26 & -30 & -216 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & 39 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{47}{4} & \frac{141}{4} \end{bmatrix} \quad (8)$$

```
> print(`Получаем на главной диагонали ступенчатой матрицы - единицы`); AB[1]:=AB[1]/AB[1,1]: AB[2]:=AB[2]/AB[2,2]: AB[3]:=AB[3]/AB[3,3]: AB[4]:=AB[4]/AB[4,4]:
> print(`Матрица после четвертых проведенных преобразований имеет вид`); AB;
```

Получаем на главной диагонали ступенчатой матрицы - единицы

Матрица после четвертых проведенных преобразований имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 & -5 & -39 \\ 0 & 1 & \frac{13}{4} & \frac{15}{4} & 27 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{4} & \frac{39}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

```
> print(`Получаем четвертый столбец единичной матрицы`); AB[4]:=AB[4]: AB[3]:=AB[3]+AB[4]*(-9/4): AB[2]:=AB[2]+AB[4]*(-15/4): AB[1]:=AB[1]+AB[4]*(5):
> print(`Матрица после пятых проведенных преобразований имеет вид`); AB;
```

Получаем четвертый столбец единичной матрицы

Матрица после пятых проведенных преобразований имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & \frac{13}{4} & 0 & \frac{63}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

```
> print(`Получаем третий столбец единичной матрицы`); AB[4]:=AB[4]: AB[3]:=AB[3]: AB[2]:=AB[2]+AB[3]*(-13/4): AB[1]:=AB[1]+AB[3]*(5):
> print(`Матрица после шестых проведенных преобразований имеет вид`); AB;
```

Получаем третий столбец единичной матрицы

Матрица после шестых проведенных преобразований имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (11)$$

```
> print(`Получаем второй столбец единичной матрицы`); AB[4]:=AB[4]: AB[3]:=AB[3]: AB[2]:=AB[2]: AB[1]:=AB[1]+AB[2]*(2):
> print(`Матрица после седьмых проведенных преобразований имеет вид`); AB;
```

Получаем второй столбец единичной матрицы

Матрица после седьмых проведенных преобразований имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

```
> print(`Ответ. Решение системы является вектор X`); X:=Matrix(4,1,[[AB[1,5]],[AB[2,5]],[AB[3,5]],[AB[4,5]]]); ;
```

Ответ. Решение системы является вектор X

$$X := \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

```
>
```

Задание 3.3.

```
> restart; with(LinearAlgebra):
> a1:=Vector([2,1,3]); a2:=Vector([lambda+1,lambda,-3]); a3:=Vector([lambda-2,-3,-7]);
```

$$a1 := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$a2 := \begin{bmatrix} \lambda+1 \\ \lambda \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$a3 := \begin{bmatrix} \lambda-2 \\ -3 \\ -7 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

```
> A:=Matrix(3,3,[a1,a2,a3]); B:=Vector([3,lambda+2,3]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & \lambda+1 & \lambda-2 \\ 1 & \lambda & -3 \\ 3 & -3 & -7 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 3 \\ \lambda+2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

```
> Delta:=Determinant(A);X:=LinearSolve(A,B);
```

$$\Delta := -3\lambda^2 - 13\lambda - 14$$

$$X := \begin{bmatrix} -\frac{\lambda-5}{3\lambda+7} \\ \frac{3\lambda+5}{3\lambda+7} \\ -\frac{3(\lambda+1)}{3\lambda+7} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

```
>  Korni:=solve(Determinant(A)=0);
```

$$Korni := -\frac{7}{3}, -2 \qquad (4)$$

```
> lambda:=Korni[1]; A; B; X:=LinearSolve(A,B);
```

$$\lambda := -\frac{7}{3}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -\frac{4}{3} & -\frac{13}{3} \\ 1 & -\frac{7}{3} & -3 \\ 3 & -3 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{1}{3} \\ 3 \end{bmatrix}$$

Error, (in LinearAlgebra:-LinearSolve) inconsistent system

```
> lambda:=Korni[2]; A; B; X:=LinearSolve(A,B);
```

$$\lambda := -2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$X := \begin{bmatrix} -\frac{5}{2}\_t1_2 + \frac{9}{2} \\ \_t1_2 \\ -\frac{3}{2}\_t1_2 + \frac{3}{2} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

4.4. Лабораторная работа № 4

Нахождение общих решений неоднородных и однородных систем линейных алгебраических уравнений

Задание 4.1. Исследовать неоднородную СЛАУ (см. табл. 9) на совместность и определенность. В случае совместности найти общее решение системы.

Задание 4.2. Найти общее решение и фундаментальную систему решений (ФСР) для системы (см. табл. 10).

Таблица 9

Вар	СЛАУ	Вар	СЛАУ
1	$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$	**2**	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -4, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + x_6 = 2, \\ 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 1. \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$	**4**	$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 = 4, \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 + 4x_5 = 5. \end{cases}$
5	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_6 = -2, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 - x_5 - x_6 = 5. \end{cases}$	**6**	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = -3, \\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 + x_5 = -1, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 4, \\ 2x_1 - 6x_2 + 6x_3 - 4x_4 - 3x_5 = -11, \\ -3x_1 - x_2 + 11x_3 - x_4 - 9x_5 = -5. \end{cases}$

Таблица 10

Вар	Система	Вар	Система
1	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$	**2**	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$
3	$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 7x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$	**4**	$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$
5	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_6 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 - x_5 - x_6 = 0. \end{cases}$	**6**	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + x_6 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 0. \end{cases}$
7	$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$	**8**	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$

Методические указания к выполнению:

Задание 4.1.

Решение неоднородной системы линейных алгебраических уравнений при помощи схемы Гаусса

```
> restart; with(LinearAlgebra):
> print(`Задаем основную матрицу A системы`); A:=Matrix(4,5,[[1,2,-3,2,1],[3,-2,1,-3,0],[5,2,-5,1,2],[2,-4,4,-5,-1]]); print(`Задаем вектор-столбец B системы`);   B:=Matrix(4,1,[[0],[-2],[-2],[-2]]);
     print(`Для решения системы методом Гаусса составляем расширенную матрицу AB размера 4x6`);AB:=Matrix(4,6,[A, B]);
```

Задаем основную матрицу A системы

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 5 & 2 & -5 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 4 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Задаем вектор-столбец B системы

$$B := \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Для решения системы методом Гаусса составляем расширенную матрицу AB размера 4x6

$$AB := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & -5 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 4 & -5 & -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

```
> print(`Проверяем, совместна ли система, используя теорему Кронекера-Капелли. Находим ранги матриц A и AB`); r[1]:=Rank(A); r[2]:=Rank(AB);
```

Проверяем, совместна ли система, используя теорему Кронекера-Капелли. Находим ранги матриц A и AB

$$r_1 := 2$$

$$r_2 := 2 \qquad (2)$$

```
> print(`Сначала решаем систему в матричном виде при помощи процедуры LinearSolve. Общее решение имеет вид`); X:=LinearSolve(A,B);
```

Сначала решаем систему в матричном виде при помощи процедуры LinearSolve. Общее решение имеет вид

$$X := \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\_t_{3,1} + \frac{1}{4}\_t_{2,1} - \frac{1}{4}\_t_{1,1} \\ \frac{1}{4} + \frac{5}{4}\_t_{3,1} - \frac{9}{8}\_t_{2,1} - \frac{3}{8}\_t_{1,1} \\ \_t_{3,1} \\ \_t_{2,1} \\ \_t_{1,1} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

```
> _t[3,1]:=c[1]: _t[2,1]:=c[2]: _t[1,1]:=c[3]: X:=X;
```

$$X := \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{4}c_2 - \frac{1}{4}c_3 \\ \frac{1}{4} + \frac{5}{4}c_1 - \frac{9}{8}c_2 - \frac{3}{8}c_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

```
> print(`Решаем систему методом Гаусса - приведением расширенной матрицы к ступенчатому виду`); AB;
```

Решаем систему методом Гаусса - приведением расширенной матрицы к ступенчатому виду

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & -5 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 4 & -5 & -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

```
> print(`Получаем первую ступень ступенчатой матрицы`); AB[1]:=AB[1]: AB[2]:=AB[2]+AB[1]*(-3); AB[3]:=AB[3]+AB[1]*(-5);  AB[4]:=AB[4]+AB[1]*(-2);
```

Получаем первую ступень ступенчатой матрицы

$$AB_2 := \begin{bmatrix} 0 & -8 & 10 & -9 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$AB_3 := \begin{bmatrix} 0 & -8 & 10 & -9 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$AB_4 := \begin{bmatrix} 0 & -8 & 10 & -9 & -3 & -2 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

```
> print(`Расширенная матрица после первых проведенных преобразований имеет вид`); AB;
```

Расширенная матрица после первых проведенных преобразований имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 10 & -9 & -3 & -2 \\ 0 & -8 & 10 & -9 & -3 & -2 \\ 0 & -8 & 10 & -9 & -3 & -2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

```
> print(`Получаем вторую ступень ступенчатой матрицы`); AB[1]:=AB[1]: AB[2]:=AB[2]: AB[3]:=AB[3]+AB[2]*(-1); AB
  [4]:=AB[4]+AB[2]*(-1);
> print(`Расширенная матрица после вторых проведенных преобразований имеет вид`); AB;
```

Получаем вторую ступень ступенчатой матрицы

$$AB_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB_4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Расширенная матрица после вторых проведенных преобразований имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 10 & -9 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

```
> AB[1]:=AB[1]+AB[2]*(1/4); AB[2]:=AB[2]:
> print(`Расширенная матрица после третьх проведенных преобразований имеет вид`); AB;
```

$$AB_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Расширенная матрица после третьх проведенных преобразований имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -8 & 10 & -9 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

```
> AB[1]:=AB[1]/AB[1,1]: AB[2]:=AB[2]/AB[2,2]:
> print(`Расширенная матрица после третьх проведенных преобразований имеет вид`); AB;
```

Расширенная матрица после третьх проведенных преобразований имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} & \frac{9}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

```
> r[3]:=Rank(AB); print(`Базисные переменные - `); x[1]; x[2]; print(`Базисный минор - `); BasisMinor:=AB[1,1]*AB
  [2,2]-AB[1,2]*AB[2,1]; print(`Свободные переменные - `); x[3]:=c[1]; x[4]:=c[2]; x[5]:=c[3];
```

$$r_3 := 2$$

Базисные переменные -

$$x_1$$

$$x_2$$

Базисный минор -

$$BasisMinor := 1$$

Свободные переменные -

$$x_3 := c_1$$

$$x_4 := c_2$$

$$x_5 := c_3 \quad (11)$$

```
> print(`Для нахождения общего решения X выражаем базисные переменные через свободные.`);
```

Для нахождения общего решения X выражаем базисные переменные через свободные. (12)

```
> x[1]:=-AB[1,3]*x[3]-AB[1,4]*x[4]-AB[1,5]*x[5]+AB[1,6]; x[2]:=-AB[2,3]*x[3]-AB[2,4]*x[4]-AB[2,5]*x[5]+AB[2,6];
  x[3]:=x[3]; x[4]:=x[4]; x[5]:=x[5];
```

$$x_1 := -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} c_1 + \frac{1}{4} c_2 - \frac{1}{4} c_3$$

$$x_2 := \frac{1}{4} + \frac{5}{4} c_1 - \frac{9}{8} c_2 - \frac{3}{8} c_3$$

$$x_3 := c_1$$

$$x_4 := c_2$$

$$x_5 := c_3 \quad (13)$$

```
> print(`Для нахождения частного решения Y0 придаем свободным переменным нулевые значения`); c[1]:=0; c[2]:=0; c[3]:=0; Y[0]:=X;
```

Для нахождения частного решения Y0 придаем свободным переменным нулевые значения

$$c_1 := 0$$

$$c_2 := 0$$

$$c_3 := 0$$

$$Y_0 := \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{(14)}$$

```
>
```

Задание 4.2.

Нахождение общего решения однородной системы линейных алгебраических уравнений

```
> restart; with(LinearAlgebra):
> print(`Задаем основную матрицу A системы`); A:=Matrix(4,5,[[1,2,-3,2,1],[3,-2,1,-3,0],[5,2,-5,1,2],[2,-4,4,-5,-1]]); print(`Задаем вектор-столбец B системы`);  B:=Matrix(4,1,[[0],[0],[0],[0]]);
```

Задаем основную матрицу A системы

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 5 & 2 & -5 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 4 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Задаем вектор-столбец B системы

$$B := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{(1)}$$

```
> print(`Находим ранг матрицы A системы`); r:=Rank(A); print(`Найденный ранг показывает количество базисных переменных в системе`, r);
```

Находим ранг матрицы A системы

$$r := 2$$

Найденный ранг показывает количество базисных переменных в системе, 2 **(2)**

```
> print(`Находим общее решение системы при помощи процедуры LinearSolve. Общее решение имеет вид`); X:=LinearSolve(A,B);
```

Находим общее решение системы при помощи процедуры LinearSolve. Общее решение имеет вид

$$X := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\_t_{3,1} + \frac{1}{4}\_t_{2,1} - \frac{1}{4}\_t_{1,1} \\ \frac{5}{4}\_t_{3,1} - \frac{9}{8}\_t_{2,1} - \frac{3}{8}\_t_{1,1} \\ \_t_{3,1} \\ \_t_{2,1} \\ \_t_{1,1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{(3)}$$

```
> print(`Присваиваем свободным переменных произвольные значения и выводим общее решение:`);_t[3,1]:=c[1]: _t[2,1]:=c[2]: _t[1,1]:=c[3]: X:=X;
```

Присваиваем свободным переменных произвольные значения и выводим общее решение:

$$X := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{4}c_2 - \frac{1}{4}c_3 \\ \frac{5}{4}c_1 - \frac{9}{8}c_2 - \frac{3}{8}c_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{(4)}$$

```
> AX:=[X[1,1], X[2,1], X[3,1], X[4,1], X[5,1]]; Y:=unapply(AX, [c[1], c[2], c[3]]);
```

$$AX := \left[\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{4}c_2 - \frac{1}{4}c_3, \frac{5}{4}c_1 - \frac{9}{8}c_2 - \frac{3}{8}c_3, c_1, c_2, c_3\right]$$

$$Y := (c\_1, c\_2, c\_3) \rightarrow \left[\frac{1}{2}c\_1 + \frac{1}{4}c\_2 - \frac{1}{4}c\_3, \frac{5}{4}c\_1 - \frac{9}{8}c\_2 - \frac{3}{8}c\_3, c\_1, c\_2, c\_3\right] \qquad \mathbf{(5)}$$

```
> print(`Находим фундаментальную систему решений (ФСР):`); E[1]:=Vector(Y(1,0,0)); E[2]:=Vector(Y(0,1,0)); E[3]:=
  Vector(Y(0,0,1));
```

Находим фундаментальную систему решений (ФСР):

$$E_1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E_2 := \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{9}{8} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E_3 := \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

```
> print(`ФСР имеет вид: `); Fundamental_Solve:=[E[1], E[2], E[3]];
```

ФСР имеет вид:

$$Fundamental\_Solve := \left[\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{9}{8} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \tag{7}$$